YU ISSN 0351—6652

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

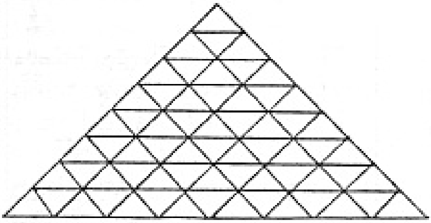
18 letnik, leto 1990/91, številka 1, strani 1-64

VSEBINA

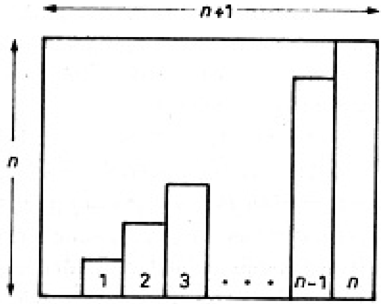
REŠITVE NALOG

KOLIKO TRIKOTNIKOV - Rešitev iz P-XVII/2

V P XVII-2 je Sandi Klavžar zastavil nalogo, koliko trikotnikov je na sliki 1.



Slika 1. Koliko trikotnikov je na sliki?



Slika 2. Grafična predstavitev vsote prvih n naravnih števil.

Najprej bomo nalogo posplošili, poiskali rešitev splošnejše naloge, odgovor na zgornje vprašanje pa potem ne bo težak.

Trikotniku, ki ima za osnovo n najmanjših trikotnikov, bomo rekli n-trikotnik. Na sliki 1 imamo torej 8-trikotnik. Splošnejša naloge se sedaj glasi: Koliko trikotnikov je v n-trikotniku? Preden začnemo z reševanjem, potrebujemo nekaj matematičnega orodja. Večina verjetno ve, da je vsota prvih n naravnih števil enaka

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

V veljavnost te identitete se lahko prepričamo tudi s pomočjo slike 2. Potrebovali bomo še vsoto kvadratov prvih n naravnih števil

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Formulo dokažimo z matematično indukcijo. Najprej pokažimo, da velja za $n=1$:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=1$$

Naj sedaj formula velja za $(n-1)$. Tedaj:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 =$$
$$= \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + n^2 = \frac{(n^2-n)(2n-1)+6n^2}{6} =$$
$$= \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Za krajši zapis vpeljimo še sumacijski znak $\sum$. Vsoto števil a_1, a_2, a_3, ... a_n bomo krajše zapisali kot $\sum_{i=1}^{n}(a_i)$, torej velja

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i)$$

Seznaniti se moramo še z oklepaji [...], s katerimi označujemo zaokroževanje na prvo celo število navzdol, npr.: $[\pi]= 3$. Potrebovali jih bomo pri celoštevilskem deljenju naravnega števila n z 2, kar bomo označili $[n/2]$. Velja

$$[n/2] = \begin{cases} \frac{n}{2}; & n \text{ sod} \\ \frac{n-1}{2}; & n \text{ lih} \end{cases}$$

Kdor pozna programski jezik pascal, ve, da lahko izvede operacijo celoštevilskega deljenja z operatorjem **div**, v našem primeru velja $[n/2] = n$ **div** 2.

In sedaj k reševanju splošne naloge. Vse trikotnike razdelimo na dva razreda, na pokončne trikotnike (tiste s horizontalno stranico spodaj) in obrnjene. Pokončnih 1-trikotnikov je v prvi vrsti n, v drugi $n-1$, v tretji $n-2$, ..., v predzadnji 2 in v zadnji 1. Vseh 1-trikotnikov je torej $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Podobno preštejemo še vse ostale trikotnike:

pokončni trikotniki		obrnjeni trikotniki	
1-trikotnikov	$\frac{n(n-1)}{2}$	1-trikotnikov	$\frac{(n-1)n}{2}$
2-trikotnikov	$\frac{(n-1)n}{2}$	2-trikotnikov	$\frac{(n-3)(n-2)}{2}$
3-trikotnikov	$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$	3-trikotnikov	$\frac{(n-5)(n-4)}{2}$
4-trikotnikov	$\frac{(n-3)(n-2)}{2}$	4-trikotnikov	$\frac{(n-7)(n-6)}{2}$
...		...	
k-trikotnikov	$\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}$	k-trikotnikov	$\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2}$
...		...	
$(n-2)$-trikotnikov 6		$([n/2]-2)$-trikotnikov	$\begin{cases} 15; & n \text{ sod} \\ 21; & n \text{ lih} \end{cases}$
$(n-1)$-trikotnikov 3		$([n/2]-1)$-trikotnikov	$\begin{cases} 6; & n \text{ sod} \\ 10; & n \text{ lih} \end{cases}$
n-trikotnikov 1		$[n/2]$-trikotnikov	$\begin{cases} 1; & n \text{ sod} \\ 3; & n \text{ lih} \end{cases}$

Z $N(n)$ označimo število trikotnikov v n-trikotniku.

$$N(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}+\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2}=S_1+S_2$$

Izračunajmo najprej vsoto S_1

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)(n-k+2)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(n^2-2nk+3n+k^2-3k+2)=$$

$$=\frac{1}{2}n^3-n\sum_{k=1}^{n}k+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k+n=$$

$$=\frac{1}{2}n^3-n\frac{n(n+1)}{2}+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{3}{2}\frac{n(n+1)}{2}+n=$$

$$=\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n$$

Z vsoto S_2 je nekaj več dela:

n je sod:

$n/2$

$$S_2=\sum_{k=1}^{\lfloor n\rfloor}\lfloor/2\rfloor\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2}$$

$\frac{1}{2}$

$$=-[(n-1)n+(n-3)(n-2)+\ldots+3\cdot4+1\cdot2]=$$

$$=\frac{1}{2}[1\cdot2+3\cdot4+5\cdot6+\ldots+(n-3)(n-2)+(n-1)n]=$$

$$=\frac{1}{2}[(2\cdot2-2)+(4\cdot4-4)+(6\cdot6-6)+\ldots+$$

$$+\ldots+((n-2)(n-2)-(n-2))+(n\cdot n-n)]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n/2}((2k)^2-2k)=2\sum_{k=1}^{n/2}k^2-\sum_{k=1}^{n/2}k=$$

$$=2[\frac{1}{6}\cdot\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)(2\frac{n}{2}+1)]-\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot(\frac{n}{2}+1)=\frac{1}{12}n^3+\frac{1}{8}n^2-\frac{1}{12}n$$

n je lih:

$$S_2 = \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(n-2k+1)(n_2k+2)}{2} =$$
$$=\frac{1}{2}[(n-1)n+(n-3)(n-2)+\ldots+4\cdot 5+2\cdot 3] =$$
$$=\frac{1}{2}[2\cdot 3+4\cdot 5+6\cdot 7+\ldots+(n-3)(n-2)+(n-1)n] =$$
$$=\frac{1}{2}[(2\cdot 2+2)+(4\cdot 4+4)+(6\cdot 6+6)+\ldots+$$
$$+\ldots+((n-2)(n-2)+(n-2))+(n\cdot n+n)] =$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{(n-1)/2}((2k)^2+2k) = 2\sum_{k=1}^{(n-1)/2}k^2+\sum_{k=1}^{(n-1)/2}k =$$
$$=2[\frac{1}{6}\cdot\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1)(2\frac{n-1}{2}+1)]+\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1) =$$
$$=\frac{1}{12}n^3+\frac{1}{8}n^2-\frac{1}{12}n-\frac{1}{8}$$

Po seštetju obeh vsot S_1 in S_2 dobimo,

$$N(n) = \begin{cases} \frac{1}{4}n^3+\frac{5}{8}n^2+\frac{1}{4}n; & n \text{ sod} \\ \frac{1}{4}n^3+\frac{5}{8}n^2+\frac{1}{4}n-\frac{1}{8}; & n \text{ lih} \end{cases}$$

Kdor zna iskati ničle polinomov, pa lahko rezultat pretvori v

$$N(n) = \begin{cases} \frac{1}{8}n(n+2)(2n+1); & n \text{ sod} \\ \frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1); & n \text{ lih} \end{cases}$$

In končno številčni rezultat: $N(8) = 170$. Na sliki 1 je torej 170 trikotnikov.

Ciril Pezdir