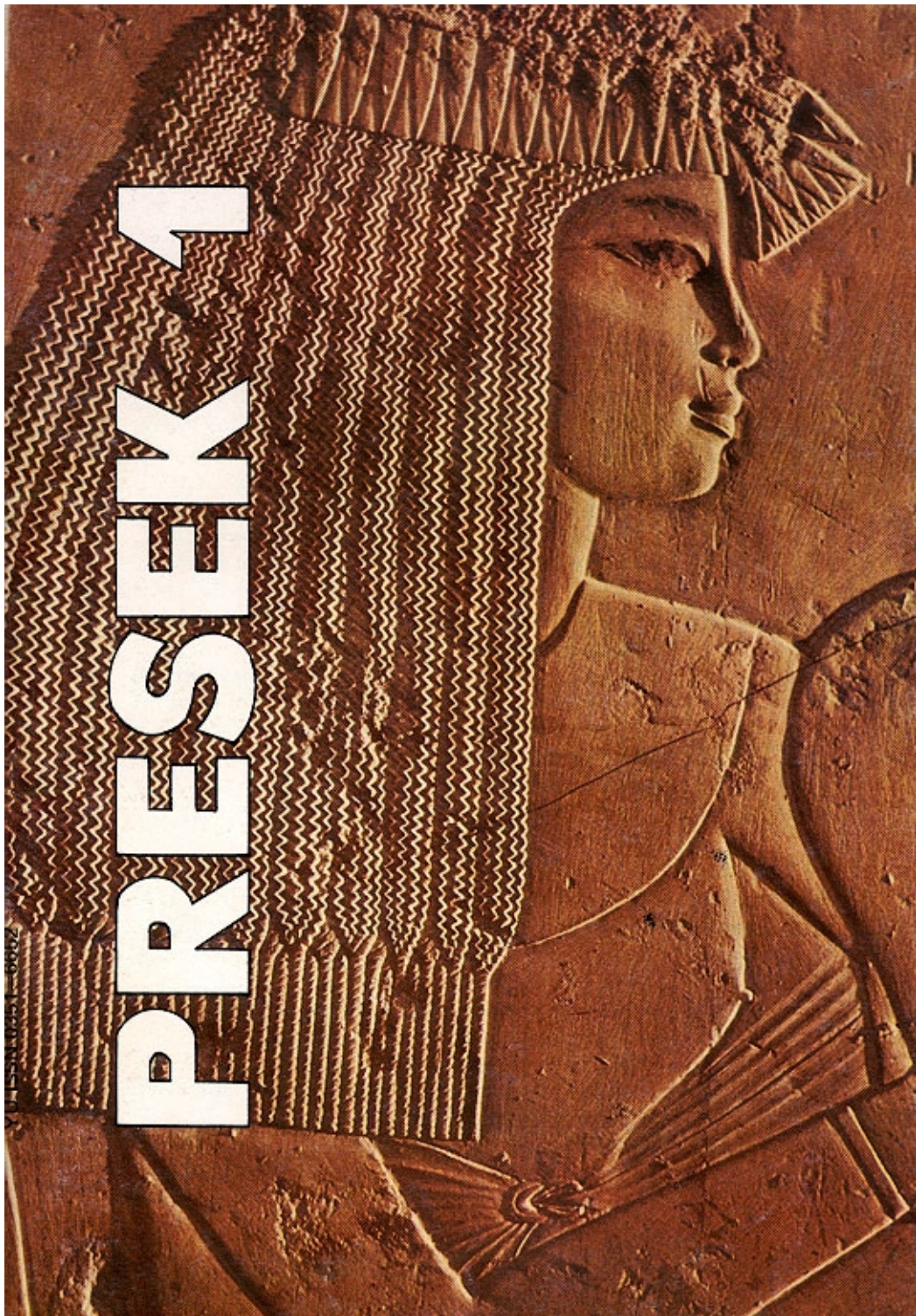


PRESEK 1



PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
18 letnik, leto 1990/91, številka 1, strani 1-64

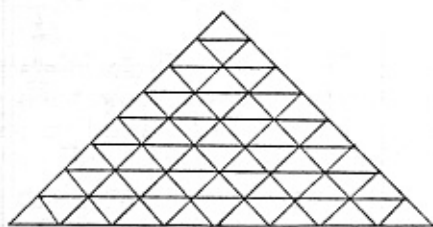
VSEBINA

UVODNIK	(Boris Lavrič)	1
MATEMATIKA	Kite-spleti-vožli (Ivan Pucelj)	2
	Rezanje večkotnika na trikotnike (Marko Razpet) ...	12
FIZIKA	Paradoksa s tekočinami (Janez Strnad)	18
REŠITVE NALOG	Koliko trikotnikov - Rešitev iz P XVII/2 (Ciril Pezdrl)	28
NALOGE	Težji trikotniki (Boris Lavrič)	27
	Miss Preseka (Sandi Klavžar, Ciril Pezdrl)	34
	Eulerjeva naloga (Vilko Domažnko)	35
	Števila in trdnjave na šahovnici (Boris Lavrič)	39
	Še dve Eccovi nalogi: Zabava. Ponarejeni kovanci (Izbrala in prev. Neža Mramor)	44
NOVE KNJIGE	Presek tudi za peti in šesti razred osnovne šole? (Dušica Boben)	40
	Hawking S.W., Kratka zgodovina časa (Janez Strnad)	42
	Zbirka nalog z republiških tekmovanj (Ciril Velkoverh)	43
	Učbeniki in priložniki za osnovno in srednjo šolo	44
	Strnad J., Zgodbe iz fizike (Marjan Hribar)	45
	Presekova knjižnica	46
NOVICE	Ob dvajsetletnici revije KVANT (Janez Strnad)	47
	Pisma bralcev (Janez Strnad)	48
ASTRONOMIJA	Paralaksa (Marijan Prosen)	50
RAČUNALNIŠTVO	Nenavadne krivulje (Ciril Pezdrl)	56
RAZVEDRILLO	Glej ga! (Vilko Domažnko)	16
	Mat v štirih potezah (Janez Aleš)	17
	Šahovske uganke (Janez Aleš)	26
	Šahovski problemi Sama Loyda (Janez Aleš)	27
	Silkovna križanka - Pojmi iz astronomije (Marko Bokalič)	32
	PRESEKOVA NADLOGA - Z grafi gre lažje (Vilko Domažnko)	36
NA OVITKU	Kite v egiptčanski umetnosti	1

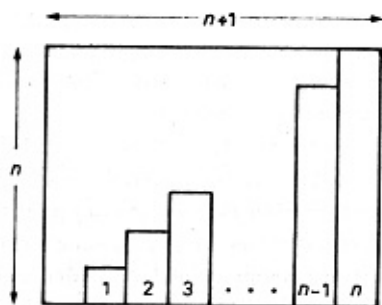
REŠITVE NALOG

KOLIKO TRIKOTNIKOV - Rešitev iz P-XVII/2

V P XVII-2 je Sandi Klavžar zastavil nalogo, koliko trikotnikov je na sliki 1.



Slika 1. Koliko trikotnikov je na sliki?



Slika 2. Grafična predstavitev vsote prvih n naravnih števil.

Najprej bomo nalogo posplošili, poiskali rešitev splošnejše naloge, odgovor na zgornje vprašanje pa potem ne bo težak.

Trikotniku, ki ima za osnovo n najmanjših trikotnikov, bomo rekli n -trikotnik. Na sliki 1 imamo torej 8-trikotnik. Splošnejša naloga se sedaj glasi: Koliko trikotnikov je v n -trikotniku? Preden začnemo z reševanjem, potrebujemo nekaj matematičnega orodja. Večina verjetno ve, da je vsota prvih n naravnih števil enaka

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

V veljavnost te identitete se lahko prepričamo tudi s pomočjo slike 2. Potrebovali bomo še vsoto kvadratov prvih n naravnih števil

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Formulo dokažimo z matematično indukcijo. Najprej pokažimo, da velja za $n = 1$:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$$

Naj sedaj formula velja za $(n-1)$. Tedaj:

$$\begin{aligned}
 & 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \\
 & = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + n^2 = \frac{(n^2-n)(2n-1) + 6n^2}{6} = \\
 & = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

Za krajši zapis vpeljimo še sumacijski znak \sum . Vsoto števil $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ bomo krajše zapisali kot $\sum_{i=1}^n (a_i)$, torej velja

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n (a_i)$$

Seznani se moramo še z oklepaji [...], s katerimi označujemo zaokroževanje na prvo celo število navzdol, npr.: $[\pi] = 3$. Potrebovali jih bomo pri celoštevilskem deljenju naravnega števila n z 2, kar bomo označili $[n/2]$. Velja

$$[n/2] = \begin{cases} \frac{n}{2}; & n \text{ sod} \\ \frac{n-1}{2}; & n \text{ lih} \end{cases}$$

Kdor pozna programski jezik pascal, ve, da lahko izvede operacijo celoštevilskega deljenja z operatorjem `div`, v našem primeru velja $[n/2] = n \text{ div } 2$.

ln sedaj k reševanju splošne naloge. Vse trikotnike razdelimo na dva razreda, na pokončne trikotnike (tiste s horizontalno stranico spodaj) in obrnjene. Pokončnih 1-trikotnikov je v prvi vrsti n , v drugi $n-1$, v tretji $n-2$, ..., v predzadnji 2 in v zadnji 1. Vseh 1-trikotnikov je torej $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. Podobno preštejemo še vse ostale trikotnike:

pokončni trikotniki		obrnjeni trikotniki	
1-trikotnikov	$\frac{n(n-1)}{2}$	1-trikotnikov	$\frac{(n-1)n}{2}$
2-trikotnikov	$\frac{(n-1)n}{2}$	2-trikotnikov	$\frac{(n-3)(n-2)}{2}$
3-trikotnikov	$\frac{(n-2)(n-1)}{2}$	3-trikotnikov	$\frac{(n-5)(n-4)}{2}$
4-trikotnikov	$\frac{(n-3)(n-2)}{2}$	4-trikotnikov	$\frac{(n-7)(n-6)}{2}$
...		...	
k-trikotnikov	$\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}$	k-trikotnikov	$\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2}$
...		...	
(n-2)-trikotnikov	6	([n/2]-2)-trikotnikov	$\begin{cases} 15; & n \text{ sod} \\ 21; & n \text{ lih} \end{cases}$
(n-1)-trikotnikov	3	([n/2]-1)-trikotnikov	$\begin{cases} 6; & n \text{ sod} \\ 10; & n \text{ lih} \end{cases}$
n-trikotnikov	1	[n/2]-trikotnikov	$\begin{cases} 1; & n \text{ sod} \\ 3; & n \text{ lih} \end{cases}$

Z $N(n)$ označimo število trikotnikov v n -trikotniku.

$$N(n) = \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2} = S_1 + S_2$$

Izračunajmo najprej vsoto S_1

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n-k+1)(n-k+2) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (n^2 - 2nk + 3n + k^2 - 3k + 2) = \\ &= \frac{1}{2} n^3 - n \sum_{k=1}^n k + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n k + n = \\ &= \frac{1}{2} n^3 - n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{2} n^2 + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} \frac{n(n+1)}{2} + n = \\ &= \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n \end{aligned}$$

Z vsoto S_2 je nekaj več dela:

n je sod:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2} \\ &= \frac{1}{2} [(n-1)n + (n-3)(n-2) + \dots + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2] = \\ &= \frac{1}{2} [1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + (n-3)(n-2) + (n-1)n] = \\ &= \frac{1}{2} [(2 \cdot 2 - 2) + (4 \cdot 4 - 4) + (6 \cdot 6 - 6) + \dots + \\ &\quad + \dots + ((n-2)(n-2) - (n-2)) + (n \cdot n - n)] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n/2} ((2k)^2 - 2k) = 2 \sum_{k=1}^{n/2} k^2 - \sum_{k=1}^{n/2} k = \\ &= 2 \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left(2 \frac{n}{2} + 1 \right) \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{1}{12} n^3 + \frac{1}{8} n^2 - \frac{1}{12} n \end{aligned}$$

n je lih:

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{(n-2k+1)(n+2k)}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} [(n-1)n + (n-3)(n-2) + \dots + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3] = \\
 &= \frac{1}{2} [2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + \dots + (n-3)(n-2) + (n-1)n] = \\
 &= \frac{1}{2} [(2 \cdot 2 + 2) + (4 \cdot 4 + 4) + (6 \cdot 6 + 6) + \dots + \\
 &\quad + \dots + ((n-2)(n-2) + (n-2)) + (n \cdot n + n)] = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{(n-1)/2} ((2k)^2 + 2k) = 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} k^2 + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} k = \\
 &= 2 \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) \left(2 \frac{n-1}{2} + 1 \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2} \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{12} n^3 + \frac{1}{8} n^2 - \frac{1}{12} n - \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Po seštetju obeh vsot S_1 in S_2 dobimo,

$$N(n) = \begin{cases} \frac{1}{4} n^3 + \frac{5}{8} n^2 + \frac{1}{4} n; & n \text{ sod} \\ \frac{1}{4} n^3 + \frac{5}{8} n^2 + \frac{1}{4} n - \frac{1}{8}; & n \text{ lih} \end{cases}$$

Kdor zna iskati ničle polinomov, pa lahko rezultat pretvori v

$$N(n) = \begin{cases} \frac{1}{8} n(n+2)(2n+1); & n \text{ sod} \\ \frac{1}{8} (n+1)(2n^2+3n-1); & n \text{ lih} \end{cases}$$

In končno številčni rezultat: $N(8) = 170$. Na sliki 1 je torej 170 trikotnikov.