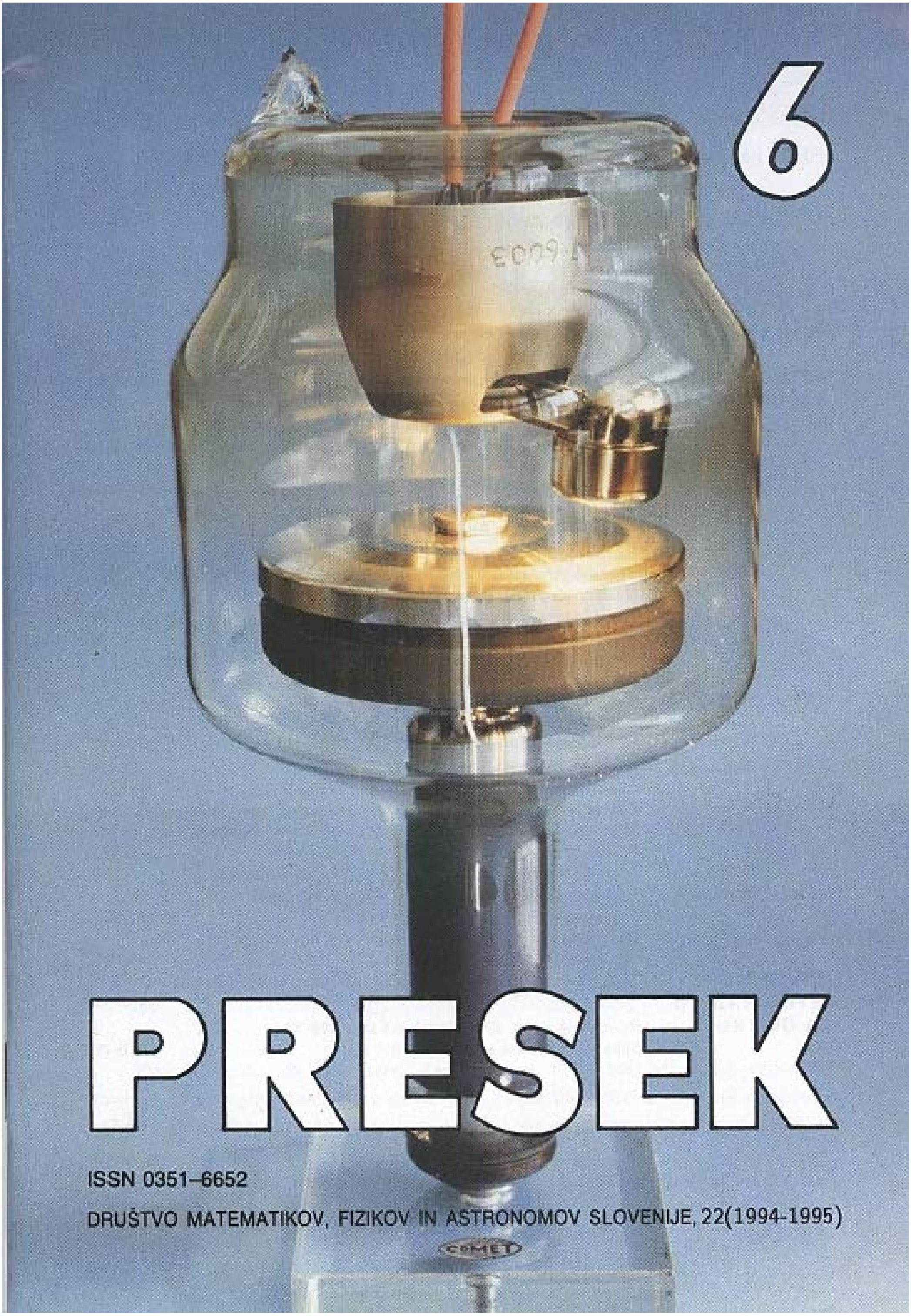


6

PRESEK

ISSN 0351–6652

DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE, 22(1994-1995)

PRESEK - list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
22. letnik, leto 1994/95, številka 6, strani 321–384

VSEBINA

KOLIKO ŠESTKOTNIKOV — Rešitev s str. 299

Nalogo bomo rešili na tri načine in vsakokrat prišli do enakega rezultata. Za računanje bomo potrebovali enakosti $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ in $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ki ju lahko dokažemo z indukcijo.

1. način:

Po vrsticah je v n-šestkotniku zapored $n, n+1, \ldots, n+n-1, \ldots, n+1, n$ 1-šestkotnikov, torej vseh $2n-1+\sum_{i=0}^{n-2} 2(n+i) = 3n^2-3n+1$.

Podobno ugotovimo, da je vseh 2-šestkotnikov $3n^2-9n+7$, vseh m-šestkotnikov je $3n^2-(6m-3)n+3m^2-3m+1$.

Vseh šestkotnikov v n-šestkotniku je torej:

$$\sum_{m=1}^{n} (3n^2-(6m-3)n+3m^2-3m+1) =$$

$$= 3n^3-3n^2(n+1)+3n^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{3n(n+1)}{2}+n = n^3.$$

2. način:

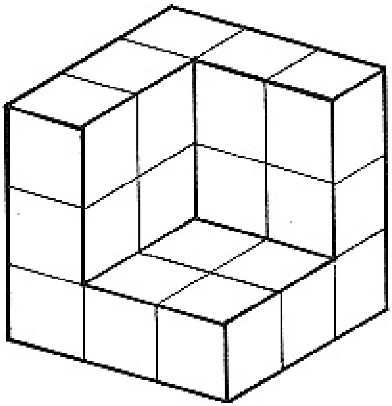
V n-šestkotniku je 1 n-šestkotnik, $(n-1)$-šestkotnikov je $1+6$, $(n-2)$-šestkotnikov je $1+6+12$, itd., v n-šestkotniku je 1-šestkotnikov $1+6+12+ + \ldots + 6(n-1)$. Od tod sledi skupno število

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+\sum_{i=1}^{k} 6i) = \sum_{k=1}^{n}(1+\sum_{i=1}^{k-1} 6i) = n+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k-1} 6i =$$

$$= n+\sum_{k=1}^{n} 3(k-1)k = n+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}-\frac{3n(n+1)}{2} = n^3.$$

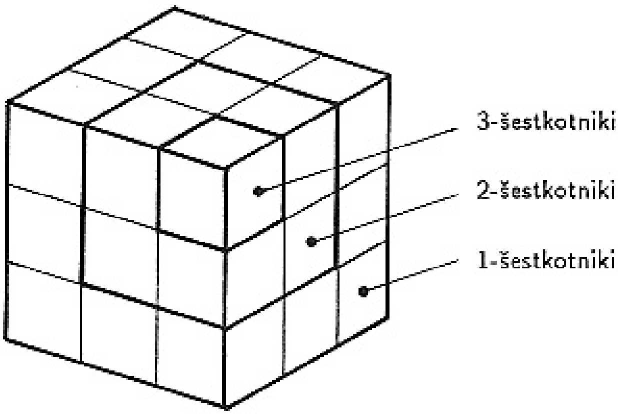
3. način:

Če pogledamo kocko v smeri telesne diagonale, vidimo 1-šestkotnik, n-šestkotnik pa dobimo s pravokotno projekcijo kocke, sestavljene iz $n \times n \times n$ manjših kock, na ravnino, ki je pravokotna na telesno diagonalo. Število 1-šestkotnikov je tedaj enako številu manjših kock v telesu (ki je za $n=3$ ilustrirano na sliki 1), torej $n^3-(n-1)^3 = 3n^3-3n+1$.



Slika 1.

Z nekaj premisleka lahko ugotovimo, da je v n-šestkotniku toliko 2-šestkotnikov, kot je manjših kock v podobnem telesu, ki pripada $n-1$, itd.



Slika 2.

Vseh šestkotnikov v n-šestkotniku je torej toliko kot vseh kock v vseh takih izsekih. Teh pa je prav n^3, kar smo ugotovili že na oba prejšnja načina.

Ciril Pezdir